ΒΙΒΛΙΟΝ VIII.

1.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι οἱ ἐλάχιστοι, ἔστωσαν μικρότεροι τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα (VII. 14) εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (VII. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν εἶναι ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ μικρότεροι ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς. Οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, εἰς τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος μεταξὺ ἐλαχίστων ἀριθμῶν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις εἰς τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸν Β.

Ἂς ἐπιταχθῇ νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες, καὶ ὁ Α πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δώσῃ τὸν Γ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας ἂς δώσῃ τὸν Δ, καὶ ἀκόμη ὁ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δώσῃ τὸν Ε, καὶ ἀκόμη ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ, Ε ἂς δώσῃ τοὺς Ζ, Η, Θ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δώσῃ τὸν Κ.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Γ, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Δ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ (VII. 17). Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἔδωσε τὸν Δ, ὁ δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἔδωσε τὸν Ε, ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β πολλαπλασιάσας τὸν Β ἔδωσεν ἕκαστον τῶν Δ, Ε. Εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ ἔδωσε τοὺς Ζ, Η, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπειδὴ ὁ Α πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ἔδωσε τοὺς Η, Θ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ (VII. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες τὸν Ε ἔδωσαν τοὺς Θ, Κ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸν Β. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22), οἱ Α, Β ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ἕκαστος μὲν τῶν Α, Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἔδωσεν ἕκαστον τῶν Γ, Ε ἕκαστον δὲ τῶν Γ, Ε πολλαπλασιάσας ἔδωσεν ἕκαστον τῶν Ζ, Κ· οἱ Γ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Κ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 27). Ἐὰν δὲ ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς (θεώρ. 1). Οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι τετράγωνοι, ἐὰν δὲ τέσσαρες, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι κύβοι.

3.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, οἱ ἄκροι αὐτῶν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν λόγον τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ (VII. 33), τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς εἰς περισσότερον (θεώρ. 2), μέχρις ὅτου τὸ λαμβανόμενον πλῆθος τῶν ἀριθμῶν γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 22). Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει ὡς γινόμενον ἕκαστον τῶν Η, Κ (θεώρ. 2 πόρ.), πολλαπλασιάσας δὲ ἕκαστον τῶν Η, Κ δίδει ὡς γινόμενον ἕκαστον τῶν Λ, Ξ (θεώρ. 2 πόρ.), καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (VII. 27). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς, εἶναι δὲ καὶ οἱ Λ, Μ Ν, Ξ ἐλάχιστοι, ἐν ᾧ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ, Δ καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Λ,Μ, Ν, Ξ, ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἄρα ὁ μὲν Α εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Λ, ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἶναι οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ οἱ Α, Δ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Λόγων δοθέντων ὁσωνδήποτε μὲ ἐλαχίστους ἀριθμοὺς νὰ εὑρεθῶσιν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μὲ τοὺς δοθέντας λόγους.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι μὲ ἐλαχίστους ἀριθμοὺς καὶ ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· πρέπει νὰ εὑρεθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἰς λόγους, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Διότι ἂς ληφθῇ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Β, Γ ὁ ἀριθμὸς Η (VII. 34) Γ. Καὶ ὅσας μὲν φορὰς ὁ Β μετρεῖ τὸν Η, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ὁ Α τὸν Θ, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Γ μετρεῖ τὸν Η, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ὁ Δ τὸν Κ. Ὁ δὲ Ε ἢ μετρεῖ τὸν Κ ἢ δὲν τὸν μετρεῖ. Ἂς τὸν μετρῇ πρότερον. Καὶ ὅσας φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Κ, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ ὁ Ζ τὸν Λ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α μετρεῖ ἰσάκις τὸν Θ καὶ ὁ Β τὸν Η, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η (VII. 13 καὶ VII. ὁρ. 21). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἀκόμη ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα εἶναι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ εἰς λόγους ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι. Διότι, ἐὰν οἱ Θ, Η, Κ, Λ δὲν εἶναι οἱ ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐχόντων τοὺς λόγους τοῦ Α πρὸς Β καὶ τοῦ Γ πρὸς Δ καὶ τοῦ Ε πρὸς Ζ, ἔστωσαν ἐλάχιστοι οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις, καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20), ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ξ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ξ· οἱ Β, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ξ· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ θὰ μετρήσῃ τὸν Ξ (VII. 35). Ἐλάχιστος δὲ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Η· ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Ξ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ὑπάρχωσιν ἄρα ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Θ, Η, Κ, Λ εὑρισκόμενοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ὡς ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Ἂς μὴ μετρῇ τώρα ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ ἂς ληφθῇ ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν Ε, Κ ὁ Μ (VII. 34). Καὶ ὅσας μὲν φορὰς ὁ Κ μετρεῖ τὸν Μ, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ἕκαστος τῶν Θ, Η ἕκαστον τῶν Ν, Ξ ἀντιστοίχως, ὅσας δὲ φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Μ, τόσας φορὰς ἂς μετρῇ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο. Ἐπειδὴ μετρεῖ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν καὶ ὁ Η τὸν Ξ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ (VII. 13 καὶ VII. ὁρ. 21). Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Μ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἰσάκις μετρεῖ ὁ Ε τὸν Μ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ ,οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο (VII. 13 καὶ VII. ὁρ. 21)· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα εὑρίσκονται ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς λόγους καὶ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἀκόμη τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι εἰς τοὺς λόγους Α πρὸς Β, Γ πρὸς Δ, Ε πρὸς Ζ. Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι, θὰ ὑπάρχωσιν ἀριθμοί τινες ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μικρότεροι τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἔχοντες τοὺς λόγους Α πρὸς Β, Γ πρὸς Δ, Ε πρὸς Ζ. Ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β εἶναι ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20), ὁ Β ἄρα μετρεῖ τὸν Ρ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Ρ· οἱ Β, Γ ἄρα μετροῦσι τὸν Ρ. Καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν Ρ (VII. 35). Ἐλάχιστος δὲ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Β, Γ εἶναι ὁ Η· ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Ρ. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ[1]· καὶ ὁ Κ ἄρα μετρεῖ τὸν Σ (VII. ὁρ. 21). Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ (VII. 20). Οἱ Ε, Κ ἄρα μετροῦσι τὸν Σ. Καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος θὰ μετρῇ τὸν Σ. Ἐλάχιστος δὲ μετρούμενος ὑπὸ τῶν Ε, Κ εἶναι ὁ Μ (VII. 35)· ὁ Μ ἄρα μετρεῖ τὸν Σ, ὁ μεγαλύτερος τὸν μικρότερον· ὅπερ ἀδύνατον. Δὲν θὰ ὑπάρχωσιν ἄρα ἀριθμοί τινες μικρότεροι τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς λόγους τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα εἶναι ἐλάχιστοι ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς λόγους τῶν Α πρὸς Β, Γ πρὸς Δ, Ε πρὸς Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστωσαν πλευραὶ οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Διότι, δοθέντων τῶν λόγων καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ τοῦ Δ πρὸς τὸν Ζ, ἂς ληφθῶσιν ὡς ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἔχοντες τοὺς λόγους τῶν Γ πρὸς Ε καὶ Δ πρὸς Ζ (θεώρ. 4) οἱ Η, Θ, Κ, ὥστε νὰ εἶναι ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Καὶ ὁ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Λ.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας μὲν τὸν Γ ἔδωσε τὸν Α, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Ε ἔδωσε τὸν Λ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ·

1. Διότι $Η:Κ=Γ:Δ=Ρ:Σ$, ἐκ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ θεωρήματος.

καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἔδωσε τὸν Λ, ἀλλ' ὅμως καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἔδωσε τὸν Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β (VII. 17). 'Αλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. 'Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δι' ἴσου ἄρα (λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) εἶναι ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β (VII. 14). Ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν [δηλ. $Η : Κ = (Γ : Ε) . (Δ : Ζ)$][1]· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

'Εὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος νὰ μὴ μετρῇ τὸν δεύτερον, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ μετρῇ κανένα.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α ἂς μὴ μετρῇ τὸν Β· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος τις θὰ μετρῇ κανένα.

Ὅτι μὲν λοιπὸν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε εὑρισκόμενοι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ δὲν μετροῦσιν ἀλλήλους, εἶναι φανερόν· διότι οὔτε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β. Λέγω τώρα, ὅτι οὔτε ἄλλος τις θὰ μετρῇ κανένα. Διότι, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἂς μετρῇ ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ὅσοι εἶναι οἱ Α, Β, Γ, ἂς ληφθῶσι τόσοι ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ (VII. 33). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ζ, Η, Θ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Β, Γ καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα θὰ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ (VII. 14). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, δὲν μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, δὲν θὰ μετρῇ ἄρα οὔτε ὁ Ζ τὸν Η (VII. ὁρ. 21)· δὲν εἶναι ἄρα ὁ Ζ μονάς· διότι ἡ μονὰς μετρεῖ πάντα ἀριθμόν. Καὶ εἶναι οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3) (οὔτε ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Θ). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὔτε ὁ Α ἄρα μετρεῖ τὸν Γ (VII. ὁρ. 21). Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι οὔτε ἄλλος τις μετρεῖ τινα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

'Εὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος μετρῇ τὸν τελευταῖον, θὰ μετρῇ καὶ τὸν δεύτερον.

1. Διότι $Η:Κ = (Η:Θ).(Θ:Κ)$ καὶ $Η:Θ = Γ:Ε$, $Θ:Κ = Δ:Ζ$.

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α ἂς μετρῇ τὸν Δ· λέγω, ὅτι ὁ Α μετρεῖ καὶ τὸν Β.

Διότι ἐὰν ὁ Α δὲν μετρῇ τὸν Β, οὔτε ἄλλος κανεὶς θὰ μετρῇ κανένα (θεώρ. 6)· μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. Μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβληθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ μεταξὺ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτούς.

Διότι ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ (δηλ. νὰ γίνῃ ἡ γεωμ. πρόοδος Α, Γ, Δ, Β) καὶ ἂς γίνῃ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὅσοι ἀριθμοὶ παρεμβάλλονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μεταξὺ τῶν Α, Β, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ τῶν Ε, Ζ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ὅσοι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Α, Β, Γ, Δ, ἂς ληφθῶσι τόσοι ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β οἱ Η, Θ, Κ, Λ (VII. 33)· οἱ ἄκροι ἄρα ἐκ τούτων οἱ Η, Λ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Η, Θ, Κ, Λ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ (VII. 14). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Η, Λ εἶναι πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι (VII. 21), οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον ἰσάκις καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον (VII. 20), τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἰσάκις ἄρα ὁ Η μετρεῖ τὸν Ε καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. Ὅσας λοιπὸν φορὰς ὁ Η μετρεῖ τὸν Ε, τόσας φορὰς καὶ ἕκαστος τῶν Θ, Κ ἂς μετρῇ ἕκαστον τῶν Μ, Ν ἀντιστοίχως (δηλ. ὁ Θ τὸν Μ καὶ ὁ Κ τὸν Ν)· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ. Οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ (VII. ὁρ. 21). Ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β· καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ· οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν μεταξὺ τῶν Ε, Ζ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ἐὰν ὑπάρχωσι δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ μεταξὺ αὐτῶν παρεμβληθῶσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἀριθμοί, ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β καὶ ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ αὐτῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Γ, Δ καὶ ἂς ληφθῇ ἡ μονὰς Ε· λέγω, ὅτι ὅσοι ἀριθμοὶ (γεωμ. μέσα) παρεμβάλλονται μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ ἑκάστου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ἂς ληφθῶσι δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἔχοντες τὸν λόγον τῶν Α, Γ, Δ, Β οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ καὶ πάντοτε εἷς περισσότερον, μέχρις ὅτου τὸ πλῆθος αὐτῶν γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β (θεώρ. 2). Ἂς ληφθῶσι καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ μὲν Ζ πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν δίδει τὸν Θ, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Μ, καὶ ὁ Η πολλαπλασιάσας μὲν ἑαυτὸν δίδει τὸν Λ, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Ο (θεώρ. 2, πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ζ, Η, εἶναι δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ζ, Η (θεώρ. 3) καὶ τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β, ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο εἶναι ἴσος πρὸς ἕκαστον τῶν Α, Γ, Δ, Β· ἴσος ἄρα εἶναι ὁ μὲν Μ πρὸς τὸν Α, ὁ δὲ Ο πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ζ πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν δίδει τὸν Θ, ὁ Ζ ἄρα μετρεῖ τὸν Θ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ζ μονάδας (VII. ὁρ. 16). Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν Ζ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Ζ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ (VII. ὁρ. 21). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει τὸν Μ, ὁ Θ ἄρα μετρεῖ τὸν Μ κατὰ τὰς εἰς τὸν Ζ μονάδας (VII. ὁρ. 16). Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς Ε τὸν ἀριθμὸν Ζ κατὰ τὰς εἰς αὐτὸν μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Ε μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Ζ καὶ ὁ Θ τὸν Μ. Εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ (VII. ὁρ. 21). Ἐδείχθη δέ, ὅτι εἶναι καὶ ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα εἶναι ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Εἶναι δὲ ἴσος ὁ Μ πρὸς τὸν Α· εἶναι ἄρα ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Ζ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ

Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ἡ μονὰς Ε πρὸς τὸν ἀριθμὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι ἀριθμοὶ παρενεβλήθησαν καὶ μεταξὺ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ἐὰν μεταξὺ ἑκάστου δύο ἀριθμῶν καὶ τῆς μονάδος παρεμβληθῶσιν ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ ἑκάστου αὐτῶν καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι μεταξὺ τῶν (δύο) ἀριθμῶν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ἂς παρεμβληθῶσι μεταξὺ (ἑκάστου) τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος Γ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ οἱ ἀριθμοὶ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω, ὅτι ὅσοι ἀριθμοὶ θὰ παρεμβληθῶσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ μεταξὺ ἑκάστου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσιν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β.

Διότι ὁ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἂς δίδῃ τὸν Θ, ἕκαστος δὲ τῶν Δ, Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ἂς δίδῃ ἕκαστον τῶν Κ, Λ.

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ Δ τὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Ἡ δὲ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· καὶ ὁ ἀριθμὸς ἄρα Δ μετρεῖ τὸν Ε κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Ε. Πάλιν ἐπειδὴ εἶναι ὡς ἡ μονὰς Γ πρὸς τὸν ἀριθμὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἡ δὲ μονὰς Γ μετρεῖ τὸν ἀριθμὸν Δ κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Α κατὰ τὰς εἰς τὸν Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ μὲν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Η, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Ε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Θ (VII. 17), εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η (VII. 18). Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ε, Θ δίδει ἕκαστον τῶν Α, Κ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ (VII. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Πάλιν ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Δ, Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ δίδει ἕκαστον τῶν Κ, Λ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἀκόμη ἐπειδὴ ὁ Ζ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Θ, Η δίδει ἕκαστον τῶν Λ, Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Ὅσοι ἄρα ἀριθμοὶ παρεμβάλλονται μεταξὺ ἑκάστου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι θὰ παρεμβληθῶσι καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἔχει λόγον τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸ τετράγωνον.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ ἀριθμὸς Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν λόγον Γ πρὸς Δ εἰς τὸ τετράγωνον.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ε. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι τετράγωνος, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ εἶναι ὁ Γ, ὁ Γ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Δ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Β. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Γ, Δ δίδει ἕκαστον τῶν Α, Ε, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε (VII. 17). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Τῶν Α, Β ἄρα ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ εἰς τὸ τετράγωνον. Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Ε, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον ὃν λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον, τοῦ Α πρὸς τὸν Ε (V. ὁρ. 9). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον, τῆς πλευρᾶς Γ πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Δύο κύβων ἀριθμῶν ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον ἔχει λόγον τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν εἰς τὸν κύβον.

Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστω πλευρὰ ὁ ἀριθμὸς Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ καὶ ὁ Α ἔχει λόγον πρὸς τὸν Β τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, εἰς τὸν κύβον.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας μὲν τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Ε, πολλαπλασιάσας δὲ τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ζ, ὁ δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Η, ἕκαστος δὲ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἂς δίδῃ ἀντιστοίχως ἕκαστον τῶν Θ, Κ.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι κύβος, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ καὶ ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδει τὸν Ε, ὁ Γ ἄρα τὸν ἑαυτόν του μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Ε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Δ τὸν ἑαυτόν του μὲν πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Η, τὸν Η δὲ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Γ, Δ δίδει ἀντιστοίχως ἕκαστον τῶν Ε, Ζ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ (VII. 17). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η (VII. 18). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ε, Ζ δίδει ἕκαστον τῶν Α, Θ ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει ἕκαστον τῶν Θ, Κ ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ (VII. 18). Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Δ πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ζ, Η δίδει ἕκαστον τῶν Κ, Β ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Τῶν Α, Β ἄρα ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι οἱ Θ, Κ.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, εἰς τὸν κύβον. Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Θ, Κ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον (τὸν λόγον τῶν κύβων) τοῦ Α πρὸς τὸν Θ (V. ὁρ. 10). Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον τριπλάσιον (τῶν κύβων) τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ἕκαστος πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του δίδῃ γινόμενόν τι, τὰ ἐξ αὐτῶν γινόμενα θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς πολλαπλασιάσωσι τὰ σχηματισθέντα γινόμενα, καὶ αὐτὰ θὰ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ [καὶ πάντοτε περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν ὁσοιδήποτε ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες ἃς δίδωσιν τοὺς Δ, Ε, Ζ, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες ἃς δίδωσι τοὺς Η, Θ, Κ· λέγω, ὅτι οἱ Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

Διότι ὁ μὲν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β ἃς δίδῃ τὸν Λ, ἕκαστος δὲ τῶν Α, Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ἃς δίδῃ ἕκαστον τῶν Μ, Ν ἀντιστοίχως. Καὶ πάλιν ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας ἃς δίδῃ τὸν Ξ, ἕκαστος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἃς δίδῃ ἕκαστον τῶν Ο, Π ἀντιστοίχως.

Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ ἀνωτέρω (προηγ. θεώρημα) ἀποδεικνύομεν, ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ἀκόμη οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ε, Ξ, Ζ καὶ ἀκόμη οἱ Η, Μ, Ν, Θ πρὸς τοὺς Θ, Ο, Π, Κ. Καὶ εἶναι ἴσον τὸ μὲν πλῆθος τῶν Δ, Λ, Ε πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ξ, Ζ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν Η, Μ, Ν, Θ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Θ, Ο, Π, Κ· δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς μετρῇ τετράγωνον, καὶ ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ μετρῇ τὴν πλευράν, καὶ ὁ τετράγωνος θὰ μετρῇ τὸν τετράγωνον.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α ἃς μετρῇ τὸν Β· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ε· οἱ Α, Ε, Β ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 11). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Ε, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε (θεώρ. 7). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ (VII. ὁρ. 21).

Πάλιν ἂς μετρῇ ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι οἱ Α, Ε, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε (VII. ὁρ. 21). Καὶ εἶναι οἱ Α, Ε, Β ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ μετρῇ τὴν πλευράν, καὶ ὁ τετράγωνος θὰ μετρῇ τὸν τετράγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν ἀριθμὸς κύβος μετρῇ ἀριθμὸν κύβον, καὶ ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ μετρῇ τὴν πλευράν, καὶ ὁ κύβος θὰ μετρῇ τὸν κύβον.

Διότι ἂς μετρῇ κύβος ἀριθμὸς ὁ Α τὸν κύβον Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας ἑαυτὸν ἂς δίδῃ τὸν Ε, ὁ δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν ἑαυτόν του ἂς δίδῃ τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Ζ, ἕκαστος δὲ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ἂς δίδῃ ἕκαστον τῶν Θ, Κ ἀντιστοίχως. Εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ (θεώρ. 12). Καὶ ἐπειδὴ οἱ Α, Θ, Κ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ (θεώρ. 7). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ τώρα ἂς μετρῇ ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

Διότι, ἀφοῦ γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή, ἀποδεικνύομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ καὶ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ (VII. ὁρ. 21)· ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

16.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς δὲν μετρῇ τετράγωνον ἀριθμόν, οὔτε ἡ πλευρὰ θὰ μετρῇ τὴν πλευράν· καὶ ἂν ἡ πλευρὰ δὲν μετρῇ τὴν πλευράν, οὔτε ὁ τετράγωνος θὰ μετρῇ τὸν τετράγωνον.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ καὶ ἂς μὴ μετρῇ ὁ Α τὸν Β· λέγω, ὅτι οὔτε ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Διότι, ἐὰν ὁ Γ μετρῇ τὸν Δ, θὰ μετρῇ καὶ ὁ Α τὸν Β (θεώρ. 14). Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· οὔτε ἄρα ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.

Ἂς μὴ μετρῇ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὔτε ὁ Α μετρεῖ τὸν Β.

Διότι, ἐὰν ὁ Α μετρῇ τὸν Β, θὰ μετρῇ καὶ ὁ Γ τὸν Δ (θεώρ. 14). Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ· οὔτε ἄρα ὁ Α μετρεῖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς δὲν μετρῇ κύβον ἀριθμόν, οὔτε ἡ πλευρὰ μετρεῖ τὴν πλευράν· καὶ ἂν ἡ πλευρὰ δὲν μετρῇ τὴν πλευράν, οὔτε ὁ κύβος μετρεῖ τὸν κύβον.

Διότι κύβος ἀριθμὸς ὁ Α ἂς μὴ μετρῇ κύβον ἀριθμὸν τὸν Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστω πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω, ὅτι ὁ Γ δὲν μετρεῖ τὸν Δ.

Διότι, ἐὰν ὁ Γ μετρῇ τὸν Δ, καὶ ὁ Α θὰ μετρῇ τὸν Β (θεώρ. 15).

Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· οὔτε ἄρα ὁ Γ μετρεῖ τὸν Δ.
Ἀλλὰ τώρα ἂς μὴ μετρῇ ὁ Γ τὸν Δ· λέγω, ὅτι οὔτε ὁ Α θὰ μετρῇ τὸν Β.
Διότι, ἐὰν ὁ Α μετρῇ τὸν Β, καὶ ὁ Γ θὰ μετρῇ τὸν Δ (θεώρ. 15).
Ἀλλὰ δὲν μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ· οὔτε ἄρα ὁ Α θὰ μετρῇ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον ἔχει διπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους (VII. ὁρ. 22), εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω λοιπόν, ὅτι τῶν Α, Β ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς καὶ ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον (τὸν λόγον τῶν τετραγώνων) ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, τουτέστι τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς (δηλ. $Α : Β = Γ^2 : Ε^2 = Δ^2 : Ζ^2$).

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ (VII. 13). Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Γ δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ δίδει τὸν Β. Ὁ Δ ὅμως πολλαπλασιάσας τὸν Ε ἂς δίδῃ τὸν Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Η, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η (VII. 17). Ἀλλ' ὡς εἶναι ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως εἶναι ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Η, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Οἱ Α, Η, Β ἄρα εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. Τῶν Α, Β ἄρα ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμός.

Λέγω τώρα, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον (τῶν τετραγώνων) ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Η, Β εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει πρὸς τὸν Η (δηλ. $Α : Β = Α^2 : Η^2$) (V. ὁρ. 9). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει διπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· (δηλ. $Α : Β = Γ^2 : Ε^2 = Δ^2 : Ζ^2$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Μεταξὺ δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν παρεμβάλλονται δύο ἀριθμοὶ μέσοι ἀνάλογοι· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β καὶ τοῦ μὲν Α ἔστωσαν πλευραὶ οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἔχοντες τὰς πλευρὰς ἀναλόγους (VII. ὁρ. 22), εἶναι ἄρα ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλλονται δύο ἀριθμοὶ μέσοι ἀνάλογοι καὶ ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ (δηλ. $Α : Β = Γ^3 : Ζ^3 = Δ^3 : Η^3 = Ε^3 : Θ^3$).

Διότι ὁ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ἂς δίδῃ τὸν Κ, ὁ δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η ἂς δίδῃ τὸν Λ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Ζ, Η καὶ τῶν μὲν Γ, Δ εἶναι γινόμενον ὁ Κ, τῶν δὲ Ζ, Η ὁ Λ, οἱ Κ, Λ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί (VII. 22)· τῶν Κ, Λ ἄρα ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος (θεώρ. 18). Ἔστω ὅτι εἶναι ὁ Μ. Ὁ Μ ἄρα εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Δ, Ζ, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Κ, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Μ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ (VII. 17). Ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. Οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἐναλλὰξ ἄρα εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς Η (VII. 13). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἕκαστος τώρα τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ ἂς δίδῃ ἀντιστοίχως ἕκαστον τῶν Ν, Ξ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Α εἶναι στερεὸς ἀριθμός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ Γ, Δ, Ε, ὁ Ε ἄρα πολλαπλασιάσας τὸ γινόμενον τῶν Γ, Δ δίδει τὸν Α. Τὸ δὲ γινόμενον τῶν Γ, Δ εἶναι ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ὁ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Λ δίδει τὸν Β. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ δίδει τὸν Α, ἀλλ' ὅμως καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Ν, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει ἕκαστος τῶν Ν, Ξ ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ (VII. 18). Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ δίδει τὸν Ξ, ἀλλ' ὅμως καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Β, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β (VII. 17). 'Αλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὄχι μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα εὑρίσκονται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τοὺς εἰρημένους λόγους τῶν πλευρῶν.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ἢ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διότι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι τέσσαρες ἀριθμοί ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Ν, Ξ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Ν (δηλ. $A : B = A^3 : N^3$, V. ὁρ. 10). 'Αλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν, οὕτως ἐδείχθη καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει τριπλάσιον λόγον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον ἔχει ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢ ὁ ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν Ζ ἢ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η ἢ καὶ ἀκόμη ὁ Ε πρὸς τὸν Θ (εἶναι δηλ. $A : B = \Gamma^3 : Z^3 = \Delta^3 : H^3 = E^3 : \Theta^3$)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

'Εὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλεται εἷς ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος, οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι.

Διότι μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τῶν Α, Β ἂς παρεμβάλληται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί.

Διότι ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ οἱ Δ, Ε (VII. 33)· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ (VII. 20). "Οσας τώρα φορὰς ὁ Δ μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ζ· ὁ Ζ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Δ δίδει τὸν Α (VII. ὁρ. 16). "Ωστε ὁ Α εἶναι ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Δ, Ζ. Πάλιν ἐπειδὴ οἱ Δ, Ε εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Γ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Δ μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Ε τὸν Β (VII. 20) "Οσας τώρα φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Β, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Η. 'Ο Ε ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Η μονάδας· ὁ Η ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Β (VII. ὁρ. 16). 'Ο Β ἄρα εἶναι ἐπίπεδος, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Ε, Η. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ἐπίπεδοι ἀριθμοί. Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὅμοιοι. Διότι, ἐπειδὴ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Α, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας δίδει τὸν Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν ἐπειδὴ ὁ Ε πολλαπλασιάσας ἕκαστον τῶν Ζ, Η δίδει ἕκαστον τῶν Γ, Β ἀντιστοίχως, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β (VII. 17). Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η (VII. 13). Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν παρεμβάλλωνται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὅμοιοι στερεοί.

Διότι ἂς παρεμβάλλωνται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ· λέγω, ὅτι οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί.

Διότι ἂς ληφθῶσι τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η (θεώρ. 2)· οἱ ἄκροι ἄρα αὐτῶν οἱ Ε, Η εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (θεώρ. 3). Καὶ ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν Ε, Η παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Ζ, οἱ ἀριθμοὶ ἄρα Ε, Η εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 20). Ἔστωσαν λοιπὸν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ ἀριθμοὶ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ. Εἶναι φανερὸν ἄρα ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ ἔχοντες τὸν λόγον καὶ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ καὶ εἶναι ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η πρὸς τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, δι' ἴσου ἄρα εἶναι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ (VII. 14). Εἶναι δὲ οἱ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι εἶναι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσιν ἰσάκις τοὺς ἔχοντας τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς καὶ ὁ μεγαλύτερος τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος τὸν μικρότερον, τουτέστι καὶ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον (VII. 20)· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α καὶ ὁ Η τὸν Δ. Ὅσας τώρα φορὰς ὁ Ε μετρεῖ τὸν Α, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν Ν. Ὁ Ν ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Ε δίδει τὸν Α (VII. ὁρ. 16). Ὁ δὲ Ε εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα πολλαπλασιάσας τὸ γινόμενον τῶν Θ, Κ δίδει τὸν Α. Ἄρα ὁ Α εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν ἐπειδὴ οἱ Ε, Ζ, Η εἶναι ἐλάχιστοι ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Γ, Δ, Β, ἰσάκις ἄρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ καὶ ὁ Η τὸν Β (VII. 20). Ὅσας φορὰς τώρα ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ, τόσαι μονάδες ἔστωσαν εἰς τὸν

Ξ. Ὁ Η ἄρα μετρεῖ τὸν Β κατὰ τὰς εἰς τὸν Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸν Η δίδει τὸν Β. Ὁ δὲ Η εἶναι τὸ γινόμενον τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα πολλαπλασιάσας τὸ γινόμενον τῶν Λ, Μ δίδει τὸν Β. Ἄρα ὁ Β εἶναι στερεός, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἶναι οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα εἶναι στερεοί.

Λέγω τώρα, ὅτι εἶναι καὶ ὅμοιοι. Διότι, ἐπειδὴ οἱ Ν, Ξ πολλαπλασιάσαντες τὸν Ε δίδουσι τοὺς Α, Γ, εἶναι ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ (VII. 18), τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἶναι οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β. Οἱ Α, Β ἄρα εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ τρίτος θὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ εἶναι τετράγωνος.

Διότι, ἐπειδὴ τῶν Α, Γ ὑπάρχει εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς ὁ Β , οἱ Α, Γ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι (θεώρ. 20). Ὁ δὲ Α εἶναι τετράγωνος· ἄρα καὶ ὁ Γ εἶναι τετράγωνος (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ τέταρτος θὰ εἶναι κύβος.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α ἔστω κύβος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος.

Διότι, ἐπειδὴ τῶν Α, Δ ὑπάρχουσι δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, οἱ Α, Δ ἄρα εἶναι ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ (θεώρ. 21). Ὁ δὲ Α εἶναι κύβος· ἄρα καὶ ὁ Δ εἶναι κύβος (VII. ὁρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι τετράγωνος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι τετράγωνος.

Διότι ἂς ἔχωσι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχουσιν ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς Γ πρὸς τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν Δ, ὁ δὲ Α ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Β εἶναι τετράγωνος.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι τετράγωνοι, οἱ Γ, Δ ἄρα εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι. Μεταξὺ τῶν Γ, Δ ἄρα παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ. 18). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β ἄρα παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ. 8). Καὶ εἶναι ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα εἶναι τετράγωνος (θεώρ. 22)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος εἶναι κύβος, καὶ ὁ δεύτερος θὰ εἶναι κύβος.

Διότι ἂς ἔχωσι δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β λόγον πρὸς ἀλλήλους, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α ἔστω κύβος· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Β εἶναι κύβος.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Γ, Δ εἶναι κύβοι, οἱ Γ, Δ εἶναι ὅμοιοι στερεοί· ἄρα μεταξὺ τῶν Γ, Δ παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 19). Ὅσοι δὲ παρεμβάλλονται μεταξὺ τῶν Γ, Δ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, τόσοι παρεμβάλλονται καὶ μεταξὺ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς αὐτοὺς (θεώρ. 8)· ὥστε καὶ μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλονται δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοί. Ἂς παρεμβάλλωνται οἱ Ε, Ζ. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὑπάρχουσι τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ οἱ Α, Ε, Ζ, Β καὶ ὁ Α εἶναι κύβος, ἄρα καὶ ὁ Β εἶναι κύβος (θεώρ. 23)· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι ἐπίπεδοι, ἄρα μεταξὺ τῶν Α, Β παρεμβάλλεται εἷς μέσος ἀνάλογος ἀριθμὸς (θεώρ. 18). Ἂς παρεμβληθῇ καὶ ἔστω ὁ Γ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Β οἱ Δ, Ε, Ζ (θεώρ. 2)· οἱ ἄκροι ἄρα αὐτῶν οἱ Δ, Ζ εἶναι τετράγωνοι (θεώρ. 2. πόρ.). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β καὶ οἱ Δ, Ζ εἶναι τετράγωνοι, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω, ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Διότι, ἐπειδὴ οἱ Α, Β εἶναι ὅμοιοι στερεοί, ἄρα παρεμβάλλονται μεταξὺ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογοι ἀριθμοὶ (θεώρ. 19). Ἄς παρεμβληθῶσιν οἱ Γ, Δ καὶ ἄς ληφθῶσιν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐκ τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τοὺς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι πρὸς τούτου; κατὰ τὸ πλῆθος οἱ Ε, Ζ, Η, Θ (θεώρ. 2)· οἱ ἄκροι ἄρα αὐτῶν οἱ Ε, Θ εἶναι κύβοι (θεώρ. 2. πόρ.). Καὶ εἶναι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἔχει λόγον, ὃν ἔχει κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.