ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διὰ τῆς ἐκδόσεως τοῦ τετάρτου τόμου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου τοῦ περιλαμβάνοντος τὰ βιβλία XI, XII, XIII, ἤτοι τὰ στοιχεῖα τῆς στερεομετρίας, ὁλοκληροῦται ἡ ἔκδοσις τῶν 13 βιβλίων τῶν Στοιχείων. Ὁ μελετητὴς τοῦ τόμου τούτου θὰ διαπιστώσῃ ἐκ τῶν σχημάτων πολλῶν θεωρημάτων, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον προβολικὴν καὶ παραστατικὴν γεωμετρίαν.

Ἐπιστέγασμα τοῦ ὅλου ἔργου τῶν Στοιχείων εἶναι ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ ἐγγραφὴ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἤτοι τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ κύβου, τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τοῦ δωδεκαέδρου, εἰς σφαῖραν. Ὁ σπουδάζων τὰ Στοιχεῖα ἐν γένει καὶ πρὸ παντὸς ἐκ τούτων τὰ συναφῆ πρὸς τὰ κανονικὰ πολύεδρα θεωρήματα μένει ἔκπληκτος πρὸ τοῦ μεγαλείου, τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ ἀνυπερβλήτου κάλλους τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ὅπως εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων (βιβλία I — X), οὕτω καὶ εἰς τὴν στερεομετρίαν ὁ Εὐκλείδης οὐδένα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν ἐπιχειρεῖ. Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι τὸ ἔργον τοῦτο ὁ Εὐκλείδης τὸ θεωρεῖ ὡς μὴ ἀνῆκον εἰς τὴν ἔρευναν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου, ἥτις ὁδηγεῖ τὸν ἐρευνητὴν ἐγγύτερον πρὸς τὴν θεώρησιν τοῦ Θείου.

Εἰς τοὺς νεωτέρους μαθηματικοὺς γεννᾶται τὸ εὔλογον ἐρώτημα, ἂν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τὸ θεώρημα : Τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο. Ἂν λάβῃ τις ὑπ' ὄψιν, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἀνεκάλυψαν τοὺς δυσκολωτάτους καὶ ὑπερόχους νόμους τῆς κατασκευῆς καὶ ἐγγραφῆς εἰς σφαῖραν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, ἄγεται κατ' ἀνάγκην εἰς τὸ *συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἦτο γνωστὸν εἰς αὐτούς. Ἱστορικὴν ὅμως μαρτυρίαν περὶ τούτου δὲν ἔχομεν. Ἐνδείξεις τινὰς καὶ συναφεῖς πληροφορίας σημειοῦμεν εἰς τὸ τέλος τῶν ἐπεξηγήσεων.*

Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ

Ἔγραφον ἐν Ἀθήναις κατὰ Φεβρουάριον 1957.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Βιβλίον XI.

1. « ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ...» θεωρεῖται παρεμβολή, διότι δὲν ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀπόδειξιν. Εἰς ἄλλους παπύρους (ἐκτὸς τοῦ παπύρου Peyrard, ἰδὲ εἰσαγωγὴν I τόμου), ὑπάρχει ἀντὶ τούτου « ἐπειδὴ δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι εἰ μὴ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον· ἄλλως θὰ συμπίπτωσι ».

33. Πόρισμα. Αἱ εὐθεῖαι νοοῦνται ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, ὡς $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$, διὰ νὰ εἶναι $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$. Τὴν πρότασιν ὅμως ταύτην τὴν περιλαμβάνει ὁ δέκατος ὁρισμὸς τοῦ V βιβλίου. Ὅθεν γεννᾶται ἀμφιβολία ὡς πρὸς τὴν γνησιότητα τοῦ πορίσματος. Εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἐὰν ληφθῇ $\delta = 2\alpha$ καὶ θεωρηθῇ ἡ α ὡς ἀκμὴ κύβου, ἡ $\beta = \alpha \sqrt[3]{2}$ εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ διπλασίου κύβου (δήλιον πρόβλημα).

39. Τὰ πρίσματα νοοῦνται τριγωνικά.

Βιβλίον XII.

2. Τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα εἶναι θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ καὶ ἦτο γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμὴ περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, ὡς πληροφορούμεθα παρὰ τοῦ σχολιαστοῦ τῶν ἔργων τοῦ Ἀριστοτέλους, Σιμπλικίου [1] (περὶ τὸ 550 μ. Χ.). Ὁ Σιμπλίκιος ἀρύεται τὰς πληροφορίας του, ὡς λέγει ὁ ἴδιος, παρὰ τοῦ μαθητοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Εὐδήμου, ὅστις ἔγραψε τὴν πρώτην ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν (ἀπολεσθεῖσαν), καὶ τοῦ Ἀλεξάνδρου τοῦ Ἀφροδισιέως (περὶ τὸ 200 μ. Χ.). Τὸ θεώρημα στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα συνεχείας τοῦ Εὐδόξου (τὸ διατυπωθὲν ὅμως τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἀναξαγόρου, ἰδὲ εἰσαγωγὴν εἰς τὸν I τόμον, σ. 23) καὶ τὸ κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν (πρῶτον θεώρημα τοῦ X βιβλίου). Κατὰ τοὺς τρεῖς τελευταίους αἰῶνας οἱ Εὐρωπαῖοι μαθηματικοὶ ὠνόμαζον τὴν ἐν τῷ θεωρήματι ἐφαρμοζομένην ἀποδεικτικὴν μέθοδον ἐξαντλητικὴν μέθοδον. Ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ὅμως τοῦ διανυομένου αἰῶνος ἀναγνωρίζεται γενικῶς, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη ἦτο ἀτυχὴς καὶ ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι τὸ πρῶτον εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν ἁπάντων θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

---

1. Σχόλια Σιμπλικίου εἰς Φυσικ. Η' τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἔκδοσις Ἀκαδημίας τοῦ Βερολίνου καὶ Ἐγκυκλοπαιδεία Pauly-Wissowa, ἄρθρον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος.

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι ΑΒΓΔ ($=K_1$), ΕΖΗΘ ($=K_2$) καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν ἀντιστοίχως, αἱ ΒΔ, ΖΘ.

Λέγω, ὅτι $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{K_2}$ (1). Ὑποτίθεται $K_1 \neq K_2$.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{Σ}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $\lessgtr K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον $\frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2} = \frac{K_1}{Σ}$ (2), ἔνθα $Σ < K_2$, καὶ $K_2 = Σ + ε$, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικρὰ ἐπιφάνεια.

Εἰς τὸν κύκλον K_2 περιγράφομεν καὶ ἐγγράφομεν τετράγωνον. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου, δήλ. τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον K_2 ὀκτάγωνον, δεκαεξάγωνον κλπ. μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὰ ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα μεταξὺ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ. 1 τῶν Στοιχείων, καθ' ὃ ὑπαρχόντων δύο ἀνίσων μεγεθῶν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου ἀφαιρέσωμεν περισσότερον τοῦ ἡμίσεος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, λαμβάνομεν κάποτε μέγεθος μικρότερον τοῦ δοθέντος μικροῦ μεγέθους. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κύκλου (K_2) ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κύκλου. Ἀπέμειναν τέσσαρα κυκλικὰ τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΚΖ. Ἐὰν ἐγγράψωμεν ὀκτάγωνον καὶ τὸ ἀφαιρέσωμεν, ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐξ ἑκάστου τῶν 4 κυκλικῶν τμημάτων ΕΚΖ (ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ) περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διότι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΕΚΖ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΕΚΖ. Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΕΚΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΕΚΖ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΕΚΖ. Ὅθεν κατὰ τὴν ἐγγραφὴν ὀκταγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει 4 τρίγωνα ΕΚΖ, ἤτοι περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ κύκλου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. Κατὰ τὴν ἐγγραφὴν δεκαεξαγώνου θὰ ἔχωμεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ κύκλου καὶ ὀκταγώνου, κατὰ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς ἀπόδειξιν. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἔστω ὅτι κατὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ (νυοστοῦ) πολυγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_2$, ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου K_2 κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = Σ + ε \qquad (3)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων $< ε$ (4).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma \qquad (5).$$

Εἰς τὸν κύκλον K_1 ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 τὸ ΑΞΒΟ ΓΠΔΡ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII. 1 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} \qquad (6).$$

Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$.

Ἐπειδὴ $\Pi_1 < K_1$, διότι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον περιέχεται ὑπὸ τοῦ κύκλου, εἶναι καὶ $\Pi_2 < \Sigma$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη, ὅτι εἶναι $\Pi_2 > \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_2. Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{\text{Ζ}\Theta^2}{\text{Β}\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$ (7) ἔνθα Μ ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1.

2. Ἔστω δεύτερον ὅτι εἶναι $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$ (8), ἔνθα $\Sigma > K_2$.

Ἐκ τῆς (8) ἀνάπαλιν εἶναι $\frac{\text{Ζ}\Theta^2}{\text{Β}\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$. Τῶν Σ, K_1, K_2 λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Τ,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T} \qquad (9).$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα ἐκ τῆς (9) καὶ $K_1 > T$ (V. 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{\text{Ζ}\Theta^2}{\text{Β}\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$, ἔνθα $T < K_1$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (7) ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\text{Ζ}\Theta^2 : \text{Β}\Delta^2 = K_2$: ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1.

Ἀφοῦ λοιπὸν δὲν εἶναι $\Sigma \lessgtr K_2$, εἶναι $\Sigma = K_2$.

Σημ. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως δύναται νὰ γίνῃ χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς τετάρτης ἀναλόγου, διὰ τῆς συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων, ὡς ἔγινε τοῦτο καὶ διὰ τὸ πρῶτον μέρος.

Ὑποτίθεται ὅτι $\frac{\text{Β}\Delta^2}{\text{Ζ}\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$ καὶ $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικρόν.

Ἔστω ὅτι μετὰ τὴν περιγραφὴν πολυγώνου τινὸς ἐπετεύχθη, ὥστε τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κύκλου K_2 ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \qquad (1)$$

ἄθροισμα ἀπομεινάντων κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$ (2).

Διὰ προσθέσεως τῶν (2) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν, Περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον K_2 πολύγωνον $\Pi_2 < \Sigma$ (3), ἐὰν καλέσωμεν τὸ τελευταῖον περιγραφὲν πολύγωνον Π_2.

Εἰς τὸν κύκλον K_1 περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 πολύγωνον τὸ Π_1. Κατὰ τὸ XII.1 θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}.$$ Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$.

Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, διότι ὁ κύκλος περιέχεται ὑπὸ τοῦ πολυγώνου, εἶναι καὶ $\Pi_2 > \Sigma$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$.

Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, ἔνθα $M > K_1$.

Θεωροῦμεν λογικὸν τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ ἐπινοητὴς τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς ἐγγραφῆς πολυγώνων θὰ εἶχεν ἐπινοήσει καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀποδείξεως διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων. Εἰς τὸ λογικὸν τοῦτο συμπέρασμα ἀντιστρατεύεται τὸ ἑξῆς ἐπιχείρημα.

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος διὰ τῆς περιγραφῆς πολυγώνων πρέπει νὰ δειχθῇ προηγουμένως ὅτι κατὰ τὴν περιγραφὴν εἰς τὸν κύκλον τοῦ ν πολυγώνου ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ (ν - 1) πολυγώνου καὶ τοῦ κύκλου. Τὴν ἀπόδειξιν ταύτην παρέχει ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἀποδεικνύει μόνον ἐκείνας τὰς προτάσεις, τὰς ὁποίας δὲν ἔχουσιν ἀποδείξει οἱ πρὸ αὐτοῦ μαθηματικοί.

5. Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ θεωρήματος 2.

Ἔστωσαν αἱ πυραμίδες ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσαι βάσεις τριγώνους τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{\Delta EZ\Theta}$. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι θὰ εἶναι $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$, ἔνθα Χ στερεὸν $\lessgtr \Delta EZ\Theta$.

1. Ἔστω πρότερον $\frac{AB\Gamma}{\Delta EZ} = \frac{AB\Gamma H}{X}$ (1), ἔνθα $X < \Delta EZ\Theta$ καὶ $\Delta EZ\Theta = X + \varepsilon$, ἔνθα ε στερεὸν ὁσονδήποτε μικρόν.

Διαιροῦμεν τὴν πυραμίδα ΔΕΖΘ εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ εἰς δύο ἴσας πυραμίδας ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ (θ. 3). Κατὰ τὸ αὐτὸ θ. 3 τὰ δύο πρίσματα εἶναι μεγαλύτερα τῶν δύο πυραμίδων. Ἀφαιροῦντες τὰ δύο πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῆς πυραμίδος ΔΕΖΘ περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Τῶν ἀπομεινασῶν δύο πυραμίδων διαιροῦμεν ἑκατέραν εἰς δύο πρίσματα ἴσα καὶ δύο πυραμίδας ἴσας καὶ ὁμοίας πρὸς τὴν ΔΕΖΘ, ἤτοι λαμβάνομεν 4 πυραμίδας ἴσας καὶ 4 πρίσματα ἴσα. Ἀφαιροῦντες τὰ 4 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει ἐκ τῶν 2 πυραμίδων, τὰς ὁποίας ἐλάβομεν κατὰ τὴν πρώτην διαίρεσιν τῆς ΔΕΖΘ, περισσότερον τοῦ ἡμίσεος. Διαιροῦμεν τὰς 4 ἴσας πυραμίδας εἰς 8 ἴσας πυραμίδας καὶ ὁμοίας πρὸς τὰς προηγουμένας καὶ 8 ἴσα πρίσματα. Ἀφαιροῦντες τὰ 8 πρίσματα ἔχομεν ἀφαιρέσει περισσότερον τοῦ ἡμίσεος τῶν 4 πυραμίδων. Συνεχίζομεν τὴν διαίρεσιν τῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πρισμάτων, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὡς ὑπόλοιπον πυραμίδας τινάς, τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ Χ. 1 τῶν Στοιχείων. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις $\text{ΔΕΖΘ} = \text{Χ} + \varepsilon$ (2)

Ὄγκος ὑπολειφθεισῶν πυραμίδων $< \varepsilon$ (3).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (3) ἀπὸ τῆς (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Ὄγκος συνόλου ἀφαιρεθέντων πρισμάτων $> \text{Χ}$, ἢ $\Pi_2 > \text{Χ}$, (4)

ἂν καλέσωμεν Π_2 τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τούτων. (Τὸ πλῆθος τῶν πρισμάτων τούτων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς προόδου $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{\nu}$).

Διαιροῦμεν ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς καὶ τὴν πυραμίδα ΑΒΓΗ καὶ ἀφαιροῦμεν ἐξ αὐτῆς τόσα τὸ πλῆθος πρίσματα, ὅσα ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ, καλοῦμεν δὲ τὸν ὄγκον τῶν πρισμάτων τούτων Π_1. Κατὰ τὸ θ. 4 εἶναι $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$ (5). Εἶναι δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}}$ (6), (ἔνθα $\text{Χ} < \text{ΔΕΖΘ}$). Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν $\dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}} = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$. Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΗ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν ὑπ' αὐτῆς περιεχομένων πρισμάτων Π_1, εἶναι ἄρα καὶ $\text{Χ} > \Pi_2$ (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (4) ἀπεδείχθη $\Pi_2 > \text{Χ}$. Ὥστε δὲν εἶναι $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}}$, ἔνθα $\text{Χ} < \text{ΔΕΖΘ}$. Ἡ αὐτὴ ἀκριβῶς ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\dfrac{\text{ΔΕΖ}}{\text{ΑΒΓ}} = \dfrac{\text{ΔΕΖΘ}}{\text{Μ}}$, ἔνθα Μ στερεόν τι $< \text{ΑΒΓΗ}$.

2. Ἔστω δεύτερον $\dfrac{\text{ΑΒΓ}}{\text{ΔΕΖ}} = \dfrac{\text{ΑΒΓΗ}}{\text{Χ}}$, ἔνθα $\text{Χ} > \text{ΔΕΖΘ}$.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\dfrac{\text{ΔΕΖ}}{\text{ΑΒΓ}} = \dfrac{\text{Χ}}{\text{ΑΒΓΗ}}$ (7).

Τῶν Χ, ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἔστω Σ, $\frac{X}{ΑΒΓΗ} = \frac{ΔΕΖΘ}{Σ}$ (8).

Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως $X > ΔΕΖΘ$. Εἶναι ἄρα καὶ $ΑΒΓΗ > Σ$ (9). Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) λαμβάνομεν

$$\frac{ΔΕΖ}{ΑΒΓ} = \frac{ΔΕΖΘ}{Σ},\ \text{ἔνθα}\ Σ < ΑΒΓΗ\ (\text{ἐκ τῆς } 9).$$

Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι βάσις : βάσιν = ἀντίστοιχος πυραμίς : στερεὸν μικρότερον τῆς ἄλλης πυραμίδος.

Ὥστε $X = ΔΕΖΘ$, ἤτοι $\frac{ΑΒΓ}{ΔΕΖ} = \frac{ΑΒΓΗ}{ΔΕΖΘ}$.

10. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι κύλινδρος = 3 κῶνοι (βάσις καὶ ὕψος τὰ αὐτά), θὰ εἶναι κύλινδρος $\gtrless$ 3 κώνων.

1. Ἔστω πρῶτον κύλινδρος > 3 κώνων καὶ κύλινδρος = 3 κῶνοι + ε, ἔνθα ε στερεὸν ὄγκου ὁσονδήποτε μικροῦ. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πρισμάτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν κυλινδρικὰ τμήματα (ἔστω τὰ ἀπὸ τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΒ...), τῶν ὁποίων ὁ ὄγκος θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{κύλινδρος} = 3\ \text{κῶνοι} + ε \qquad (1)$$

$$\text{ὄγκος ἀπομεινάντων κυλινδρικῶν τμημάτων} < ε \qquad (2).$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

Πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ > 3 κώνων ἐχόντων βάσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτὸ) ἢ πυραμίδα ἔχουσαν βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ > κώνου ἔχοντος βάσιν τὸν κύκλον (ὕψος τὸ αὐτό). Ὅπερ ἀδύνατον, διότι ὁ κῶνος ἐμπεριέχει τὴν πυραμίδα.

2. Ἔστω δεύτερον κύλινδρος < 3 κώνων (βάσις, ὕψος τὰ αὐτὰ)

$$\text{ἢ κῶνος} > \frac{1}{3}\ \text{κυλίνδρου},$$

ὁπότε θὰ εἶναι κῶνος $= \frac{1}{3}$ κυλίνδρου + ε, ἔνθα ε ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου στερεόν.

Διὰ συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιρέσεως τούτων ἀπὸ τοῦ κώνου, θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$\text{κῶνος} = \frac{1}{3}\ \text{κυλίνδρου} + \varepsilon \qquad (3)$$

$$\text{ἀπομείναντα τμήματα κώνου} < \varepsilon \qquad (4).$$

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) λαμβάνομεν :

πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ $> \frac{1}{3}$ κυλίνδρου (ὕψος τὸ αὐτό), ἢ

πρίσμα ἔχον βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΕΒΖΓΗΔΘ > κυλίνδρου. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι τὸ πρίσμα ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου.

11. Διότι ἐὰν δὲν εἶναι $\frac{ΑΒΓΔ}{ΕΖΗΘ} = \frac{ΑΛ}{ΕΝ}$, θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓΔ}{ΕΖΗΘ} = \frac{ΑΛ}{\Xi}$, ἔνθα Ξ στερεὸν $\lessgtr$ ΕΝ.

1. Ἔστω πρότερον Ξ < ΕΝ καὶ ΕΝ = Ξ + Ψ, ἔνθα Ψ στερεὸν ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Ἀνυψοῦντες ἀπὸ τοῦ κύκλου ΕΖΗΘ συνεχῶς πυραμίδας, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἀφαιροῦντες ταύτας ἀπὸ τοῦ κώνου θὰ λάβωμεν κατά τινα στιγμὴν ὡς ὑπόλοιπον τμήματα κώνου μικρότερα τοῦ Ψ (Χ. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$ΕΝ = \Xi + Ψ \qquad (1)$$

$$\text{ἀπομείναντα τμήματα κώνου} < Ψ \qquad (2).$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν :

πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τὸ πολύγωνον ΘΟΕΠΖΡΗΣ > Ξ (3) (ἐὰν ἡ τελευταίως ἀφαιρεθεῖσα πυραμὶς εἶχε βάσιν τὸ ἀνωτέρω πολύγωνον καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ τοῦ κώνου). Ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἰσοϋψῆ πρὸς τὸν κῶνον ΑΛ. Καλοῦμεν $Κ_1$ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΑΓ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον $Π_1$ καὶ $Κ_2$ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον τὴν ΕΗ καὶ τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον $Π_2$. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{ΑΓ^2}{ΕΗ^2} = \frac{Π_1}{Π_2}$ καὶ $\frac{ΑΓ^2}{ΕΗ^2} = \frac{Κ_1}{Κ_2}$, θὰ εἶναι ἄρα $\frac{Κ_1}{Κ_2} = \frac{Π_1}{Π_2}$ (4).

Εἶναι δὲ $\frac{Κ_1}{Κ_2} = \frac{ΑΛ}{\Xi}$ (5), ἔνθα Ξ < ΕΝ, καὶ $\frac{Π_1}{Π_2} = \frac{\text{πυραμίς, } Π_1 \cdot υ}{\text{πυραμίς, } Π_2 \cdot υ}$ (6) ἂν καλέσωμεν υ τὸ ὕψος ΚΛ = ΜΝ.

Ἐκ τῶν (4), (5), (6) λαμβάνομεν $\frac{ΑΛ}{\Xi} = \frac{\text{πυραμίς, } Π_1 \cdot υ}{\text{πυραμίς, } Π_2 \cdot υ}$ (7).

Ἐπειδὴ κῶνος ΑΛ > πυραμίδος, $Π_1 \cdot υ$, εἶναι ἄρα καὶ Ξ > πυραμίδος, $Π_2 \cdot υ$, (V. 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη ὅτι Ξ < $Π_2 \cdot υ$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Κ_2}{Κ_1} = \frac{ΕΝ}{Μ}$, ἔνθα Μ στερεὸν < τοῦ κώνου ΑΛ.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{Ξ}$, ἔνθα Ξ $>$ κώνου ΕΝ.

Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{K_2}{K_1} = \frac{Ξ}{ΑΛ}$ (1). Τῶν Ξ, ΑΛ, ΕΝ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{Ξ}{ΑΛ} = \frac{ΕΝ}{Χ}$ (2). Εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεως Ξ $>$ ΕΝ. Εἶναι ἄρα καὶ ΑΛ $>$ Χ (V. 14).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{K_2}{K_1} = \frac{ΕΝ}{Χ}$. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κύκλος : κύκλον = κῶνος : μικρότερον ἀντιστοίχου κώνου στερεόν. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{Ξ \lesseqgtr ΕΝ}$, καὶ συνεπῶς εἶναι $\frac{K_1}{K_2} = \frac{ΑΛ}{ΕΝ}$.

Εἶναι ἄρα καὶ $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\text{κύλινδρος}}{\text{κύλινδρον}}$.

12. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κῶνος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$ (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἰσχύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓΔΛ}{Ξ} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$, ἔνθα Ξ στερεὸν $\lessgtr$ κώνου ΕΖΗΘΝ.

1. Ἔστω πρότερον Ξ $<$ ΕΖΗΘΝ καὶ ΕΖΗΘΝ $=$ Ξ $+$ ε, ἔνθα ε στερεὸν ὁσονδήποτε μικροῦ ὄγκου. Διὰ τῆς συνεχοῦς ἀνυψώσεως πυραμίδων καὶ ἀφαιρέσεως τούτων, ὡς ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος θὰ ἀπομείνωσι κατά τινα στιγμὴν τμήματα κώνου, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι μικρότερα τοῦ ε (X. 1). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

ΕΖΗΘΝ $=$ Ξ $+$ ε (1)

καὶ ἀποτμήματα κώνου $<$ ε (2).

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (2) ἀπὸ τῆς (1) λαμβάνομεν

πυραμὶς (βάσις ΕΟΖΠΗΡΘΣ, ὕψος ΜΝ) $>$ Ξ. (3).

Εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓΔ ἐγγράφομεν τὸ πολύγωνον ΑΤΒΥΓΦΔΧ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον πρὸς τὸ πολύγωνον ΕΟΖΠΗΡΘΣ καὶ ἀνυψοῦμεν ἀπ' αὐτοῦ πυραμίδα ἔχουσαν ὕψος τὸ ΚΛ. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τὰ τρίγωνα ΒΚΛ, ΖΜΝ εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα ΒΚΤ, ΖΜΟ καὶ τὰ τρίγωνα ΛΚΤ, ΝΜΟ. Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΚΒ, ΝΜΖ εἶναι $\frac{ΛΒ}{ΒΚ} = \frac{ΝΖ}{ΖΜ}$ (4) καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων

ΒΚΤ, ΖΜΟ εἶναι $\frac{KB}{BT}=\frac{MZ}{ZO}$ (5). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (4) καὶ (5) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου, λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda B}{BT}=\frac{NZ}{ZO}$. Ἀνάπαλιν ἡ σχέσις αὕτη εἶναι $\frac{BT}{\Lambda B}=\frac{ZO}{NZ}$ (6). Διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΛΤΚ, ΝΟΜ εἶναι $\frac{\Lambda T}{TK}=\frac{NO}{OM}$ (7), καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΚΒ, ΟΜΖ εἶναι $\frac{KT}{TB}=\frac{MO}{OZ}$ (8). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (7) καὶ (8) κατὰ μέλη (λῆψις τοῦ δι' ἴσου λόγου) λαμβάνομεν $\frac{\Lambda T}{TB}=\frac{NO}{OZ}$ (9). Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (9) καὶ (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{T\Lambda}{\Lambda B}=\frac{NO}{NZ}$, ἤτοι καὶ ἡ τετάρτη ἕδρα τῆς πυραμίδος ΒΚΤΛ ἡ ΒΤΛ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τετάρτην ἕδραν τῆς πυραμίδος ΖΜΟΝ τὴν ΖΟΝ. Αἱ πυραμίδες ἄρα αὗται εἶναι ὅμοιαι. Εἶναι ἄρα $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=\frac{BK^3}{ZM^3}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$ (θ. 8).

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι $\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}=\frac{TK\Lambda\Lambda}{OMEN}=\frac{\Lambda KX\Lambda}{EM\Sigma N}=\frac{XK\Delta\Lambda}{\Sigma M\Theta N}=\frac{\Delta K\Phi\Lambda}{\Theta MPN}=\frac{\Phi K\Gamma\Lambda}{PMHN}=\frac{\Gamma K\Upsilon\Lambda}{HM\Pi N}=\frac{\Upsilon KB\Lambda}{M\Pi ZN}$. Καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν (V. 12) θὰ εἶναι $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=$

$$\frac{BKT\Lambda+TK\Lambda\Lambda+\Lambda KX\Lambda+XK\Delta\Lambda+\Delta K\Phi\Lambda+\Phi K\Gamma\Lambda+\Gamma K\Upsilon\Lambda+\Upsilon KB\Lambda}{ZMON+OMEN+EM\Sigma N+\Sigma M\Theta N+\Theta MPN+PMHN+HM\Pi N+M\Pi ZN}$$

ἢ $\frac{BKT\Lambda}{ZMON}=\frac{\text{πυραμίς, } AT B\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X\Lambda}{\text{πυραμίς, } EOZ\Pi HP\Theta\Sigma N}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$.

Ὑπετέθη δὲ καὶ $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$, ἔνθα Ξ < κώνου ΕΖΗΘΝ.

Εἶναι ἄρα $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{\text{πυραμίς, } ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X\Lambda}{\text{πυραμίς, } EOZ\Pi HP\Theta\Sigma N}$.

Ἐπειδὴ ὁ κῶνος ΑΒΓΔΛ > πυραμίδος ΑΤΒΥΓΦΔΧΛ, εἶναι ἄρα καὶ στερεὸν Ξ > πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἀπεδείχθη Ξ < πυραμίδος ΕΟΖΠΗΡΘΣΝ.

Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\text{κῶνος } AB\Gamma\Delta\Lambda}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{B\Delta^3}{Z\Theta^3}$, ἔνθα Ξ < κώνου ΕΖΗΘΝ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι

$\frac{\text{κῶνος } EZH\Theta N}{\text{στερεὸν } \Xi}=\frac{Z\Theta^3}{B\Delta^3}$, ἔνθα Ξ < κώνου ΑΒΓΔΛ.

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{στερεὸν Ξ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$, ἔνθα Ξ $>$ κώνου ΕΖΗΘΝ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{Ξ}{ΑΒΓΔΛ} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$ (1). Τῶν Ξ, ΑΒΓΔΛ, ΕΖΗΘΝ λαμβάνομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, $\frac{Ξ}{ΑΒΓΔΛ} = \frac{ΕΖΗΘΝ}{Χ}$ (2). Ἐπειδὴ ὑπετέθη Ξ $>$ ΕΖΗΘΝ, εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓΔΛ $>$ Χ (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{ΕΖΗΘΝ}{Χ} = \frac{ΖΘ^3}{ΒΔ^3}$, ἔνθα Χ $<$ κώνου ΑΒΓΔΛ. Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἀπεδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον, ἑνὸς κώνου : διάμετρος βάσεως εἰς τὸν κύβον ἄλλου κώνου = πρῶτος κῶνος : στερεὸν μικρότερον τοῦ ἄλλου κώνου. Ὅθεν ἀφοῦ δὲν εἶναι Ξ $\lessgtr$ κώνου ΕΖΗΘΝ, θὰ εἶναι Ξ = κῶνος ΕΖΗΘΝ καὶ συνεπῶς $\frac{\text{κῶνος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κῶνος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$.

Καὶ ἐπειδὴ τρεῖς κῶνοι = κύλινδρος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους, θὰ εἶναι $\frac{\text{κύλινδρος ΑΒΓΔΛ}}{\text{κύλινδρος ΕΖΗΘΝ}} = \frac{ΒΔ^3}{ΖΘ^3}$.

17. Τὸ $ΚΒ^2$ εἶναι $> 2ΒΨ^2$, διότι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου $= 2ΒΨ^2$. Ἐπειδὴ δὲ ΚΒ = ΚΣ = ΒΟ $>$ ΟΣ, ἕπεται ΚΒ $>$ πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου τεραγώνου.

18. Ἔστωσαν αἱ σφαῖραι ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ διάμετροι αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{ΑΒΓ}{ΔΕΖ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$ (1).

Διότι ἐὰν δὲν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι $\frac{ΑΒΓ}{ΗΘΚ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$, ἔνθα ΗΘΚ σφαῖρα $\lessgtr$ σφαίρας ΔΕΖ.

1. Ἔστω πρότερον $\frac{ΑΒΓ}{ΗΘΚ} = \frac{ΒΓ^3}{ΕΖ^3}$ (2), ἔνθα ΗΘΚ σφαῖρα $<$ σφαίρας ΔΕΖ. Θεωροῦμεν τὰς σφαίρας ὁμοκέντρους. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν μεγαλυτέραν σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας σφαίρας ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_2$. Ἐπίσης ἐγγράφομεν καὶ εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν εἰς τὴν σφαῖραν ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $Π_1$. Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προηγουμένου θεωρήματος εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}^3}{\mathrm{EZ}^3} \qquad (3).$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{H\Theta K}} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$. Εἶναι δὲ ἡ σφαῖρα ΑΒΓ $>$ τοῦ ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένου πολυέδρου Π_1. Εἶναι ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ $>$ τοῦ πολυέδρου Π_2 (V. 14). Ἀλλὰ ἡ σφαῖρα ΗΘΚ ἐμπεριέχεται ὑπὸ τοῦ πολυέδρου Π_2 καὶ συνεπῶς εἶναι μικροτέρα αὐτοῦ· ὥστε δὲν εἶναι $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{H\Theta K}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}^3}{\mathrm{EZ}^3}$, ἔνθα ΗΘΚ $<$ ΔΕΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι καὶ $\frac{\Delta\mathrm{EZ}}{\Sigma} = \frac{\mathrm{EZ}^3}{\mathrm{B\Gamma}^3}$, ἔνθα Σ σφαῖρα $<$ σφαίρας ΑΒΓ (α).

2. Ἔστω δεύτερον $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\Lambda\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}^3}{\mathrm{EZ}^3}$, ἔνθα ΛΜΝ σφαῖρα $>$ σφαίρας ΔΕΖ. Ἀνάπαλιν ἄρα εἶναι $\frac{\Lambda\mathrm{MN}}{\mathrm{AB\Gamma}} = \frac{\mathrm{EZ}^3}{\mathrm{B\Gamma}^3}$ (1). Τῶν σφαιρῶν ΛΜΝ, ΑΒΓ, ΔΕΖ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν σφαῖραν ἔστω Σ, ἤτοι $\frac{\Lambda\mathrm{MN}}{\mathrm{AB\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{EZ}}{\Sigma}$ (2). Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΛΜΝ $>$ ΔΕΖ, εἶναι ἄρα καὶ ΑΒΓ $>$ Σ (V. 14). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{\Delta\mathrm{EZ}}{\Sigma} = \frac{\mathrm{EZ}^3}{\mathrm{B\Gamma}^3}$, ἔνθα Σ $<$ ΑΒΓ. Ὅπερ ἀδύνατον.

Διότι τοῦτο ἀπεδείχθη εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (α). Ὥστε δὲν εἶναι ΗΘΚ $\lessgtr$ ΔΕΖ, ἤτοι ΗΘΚ $=$ ΔΕΖ.

Παρατήρησις ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 2, 5, 11, 12, 18.

Εἰς τὴν σχέσιν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (1), ἔνθα $\alpha > \gamma$, διὰ νὰ συναχθῇ τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ $\beta > \delta$, λαμβάνεται ὁ ἐναλλὰξ λόγος $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, ἐν ᾧ εἰς τὸ συναφὲς θεώρημα τοῦ V. 14 ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς (1), ὅτι ἂν $\alpha \gtreqless \gamma$ εἶναι καὶ $\beta \gtreqless \delta$.

Σημ. Τοῦ θεωρήματος 6 δὲν ὑπάρχει ἄλλη ἀπόδειξις εἰς τὸ Παράρτημα II.

Βιβλίον XIII.

1. Ἐὰν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς εὐθείας α τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον εἶναι x, θὰ εἶναι καὶ

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

2. Ἀντίστροφον προηγουμένου.

3. Ἐὰν $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ εἶναι καὶ $\left[(\alpha - x) + \frac{x}{2}\right]^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

4. Ἐὰν $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ εἶναι καὶ $\alpha^2 + (\alpha - x)^2 = 3x^2$.

5. Ἐὰν $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ εἶναι καὶ $\alpha^2 = (\alpha + x)x$.

6. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι ῥητή, ρ, καὶ εἶναι $x^2 = \rho(\rho - x)$, ἡ x καὶ ἡ $(\rho - x)$ εἶναι ἀποτομαί.

Κατὰ τὸ θεώρ. 1 εἶναι $\left(x + \frac{\rho}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{\rho}{2}\right)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$. Τὰ μονώνυμα τῆς διαφορᾶς x εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73). Ἐὰν εἰς τὴν $(\rho - x)$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν x διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς της, θὰ ἔχωμεν $\rho - x = \frac{3\rho}{2} - \frac{\rho}{2}\sqrt{5}$. Καὶ ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀποτομή, διότι τὰ μονώνυμα τοῦ β′ μέλους εἶναι ῥητὰ καὶ μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα (X. 73).

9. Ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου εἶναι $\frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (IV. 10). Κατὰ τὸ θεώρημα ἡ ὅλη εὐθεῖα θὰ εἶναι

$$\rho + \left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{\rho}{2}\sqrt{5} + \frac{\rho}{2},$$

ρ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ταύτης τεμνομένης ἄκρον καὶ μέσον λόγον καὶ $\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} + \frac{\rho}{2}\right) - \rho = \frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}$, τὸ μικρότερον τμῆμα. Ἤτοι $\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} + \frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{\rho}{2}\sqrt{5} - \frac{\rho}{2}\right) = \rho^2$.

11. Ἔστω ἡ ῥητὴ διάμετρος $B\Theta = 2\rho$, καὶ $ZK = \frac{\rho}{4}$. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος εἶναι $BK^2 = 5KM^2$ (1) καὶ εἶναι $BM = BK - KM$.

'Αντικαθιστῶντες ἐνταῦθα ἐκ τῆς (1) τὴν ΒΚ λαμβάνομεν $BM = BK\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (2). Εἶναι δὲ $BK = \frac{5\rho}{4}$. Συνεπῶς $BM = \frac{5\rho}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. $AB^2 = BM \times B\Theta = \frac{10\rho^2}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $AB = \frac{\rho}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, (3), ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Αὔτη εἶναι ἐλάσσων (Χ. 76). Εἶναι ὅμως δεδομένη ὑπὸ τὴν μὴ ἀνεπτυγμένην μορφὴν τοῦ Χ. 94 (τοῦ α' μέλους τοῦ θ. τούτου· ἰδὲ ἐπεξήγησιν). 'Η (3) γράφεται $\rho\sqrt{\frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$. Κατὰ τὸ Χ. 94 θὰ εἶναι

$$\rho\sqrt{\frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \frac{\rho}{2}\sqrt{5\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} - \frac{\rho}{2}\sqrt{5\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \quad (4).$$

('Η εἰς τὸ Χ. 94 σχέσις $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ εἶναι ἐνταῦθα $1^2 + 2^2 = 5$).

Τὸ β' μέλος τῆς (4) εἶναι ἡ μορφὴ τῆς ἐλάσσονος τοῦ Χ. 76, ἤτοι εἶναι διαφορὰ δύο μονωνύμων, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μονωνύμων εἶναι ῥητὸν $\left(\text{τὸ } \frac{5\rho^2}{2}\right)$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων εἶναι μέσον, ἤτοι περιέχει τὴν δευτέραν ῥίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ $\left(\text{τὸ } \frac{5\rho^2}{4\sqrt{5}}\right)$.

16. 'Η ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἐγγράφεται πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ εἰκοσαέδρου, λαμβάνεται συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἐγγράφεται τὸ εἰκοσάεδρον καὶ εἶναι $\rho = \frac{2r}{\sqrt{5}}$, ἐὰν r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. 'Η πλευρὰ τοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων κατὰ τὸ θ. 11.

Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τὸ ὁποῖον μνημονεύεται εἰς τὸν πρόλογον ὅτι «τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν καὶ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τούτου σὺν δύο».

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων θεώρημα τοῦ Euler. Ὁ Max Zacharias εἰς τὸ ἔργον του Στοιχειώδης Γεωμετρία τοῦ Ἐπιπέδου καὶ τοῦ Χώρου, 1930, σελ. 172 (Elementargeometrie der Ebene und des Raumes, Göschens Lehrbücherei B. 16) γράφει ἐπὶ τούτου τὰ ἑξῆς·

« Τὸ θεώρημα διετυπώθη, ὡς πρῶτος παρετήρησεν ὁ R. Baltzer τῷ 1861, ἤδη πρὸ τοῦ Euler, ὑπὸ τοῦ Καρτεσίου (Descartes), ὡς συνάγεται ἐκ παρεφθαρμένου τινὸς ἀντιγράφου διατηρηθέντος ὑπὸ τοῦ Leibnitz καὶ δημοσιευθέντος μόλις τῷ 1860. Καὶ δὴ καὶ εἶναι πιθανὸν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης τὸ ἐγνώριζεν. Ὁ Euler τὸ ἀνεκάλυψεν ἐκ νέου τῷ 1752 κατ' ἀρχὰς δι' ἐπαγωγῆς καὶ τὸ ἐδημοσίευσεν ἄνευ ὅμως ἀποδείξεως, τὴν ὁποίαν εὗρεν ἀμέσως μετὰ ταῦτα (Descartes, Oeuvres inéd., Paris 1860, σ. 214. Euler, Nov. Comm. Petz. (1752 - 1753) 4 (τυπωθὲν 1758) σ. 109 καὶ 140. Baltzer, Berl. Mon. Ber. 1861, σ. 1043) ».

Ἐκ τῆς διατυπουμένης ἀνωτέρω γνώμης τοῦ M. Zacharias ὅτι πιθανὸν ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τὸ θεώρημα τοῦτο, ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ διερευνήσωμεν τὸ πρᾶγμα. Πρὸ παντὸς πρέπει νὰ εὑρεθῇ, εἰς ποῖα στοιχεῖα στηρίζει ὁ M. Zacharias τὴν γνώμην του ταύτην. Ἐγράψαμεν εἰς διακεκριμένους ἐν Γερμανίᾳ μαθηματικούς, ἀσχολουμένους εἰδικῶς μὲ τὰ Ἑλληνικὰ μαθηματικά, ἀλλὰ δυστυχῶς δὲν ἦσαν οὗτοι εἰς θέσιν νὰ παράσχωσιν εἰς ἡμᾶς συναφεῖς πληροφορίας. Οὔτε ἐλάβομεν ζητηθὲν ἀντίγραφον τῆς ἀνωτέρω μνημονευομένης πραγματείας τοῦ Baltzer.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΓΕΝΟΜΕΝΑΙ ΕΝ ΤΗ ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

1. Ὁ ἀναδρομικὸς συλλογισμὸς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου. Συνεδρία 11 - 6 - 1953.

Διὰ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης, λαμβανομένης ἀφορμῆς ἐκ παρατηρήσεως τοῦ G. Vacca[1]*, γενομένης τῷ 1910, ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς (ὁ καλούμενος καὶ συλλογισμὸς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς ἢ ἐκ τῆς ἀληθείας τῶν ν συνάγεται ἡ ἀλήθεια τῶν ν + 1) ἐφαρμόζεται εἰς πλεῖστα θεωρήματα τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Πρὸς τοῦτο μνημονεύονται 1) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 20 θεωρ. τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, 2) Τὸ χωρίον ἐκ τῶν Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων (73 b 32) τοῦ Ἀριστοτέλους « Τὸ καθόλου δὲ ὑπάρχει τότε, ὅταν ἐπὶ τοῦ τυχόντος καὶ πρώτου δείκνυται » καὶ 3) Ἐκ τῶν συγχρόνων ἀποδείξεων τὸ θεώρημα « ἓν γινόμενον ν πλήθους συναρτήσεων (πεπερασμένου) εἶναι συνεχὲς διὰ δοθεῖσαν τιμὴν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστος παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συνάρτησις συνεχὴς διὰ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς».*

Ὁ E. Lindelœf[2] *διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου γράφει τὰ ἑξῆς· « Θεωροῦμεν ἐν πρώτοις ἓν γινόμενον ἐκ τριῶν συναρτήσεων*

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi),$$

τὰς ὁποίας ὅλας ὑποθέτομεν διὰ $\chi = \chi_0$ *συνεχεῖς. Ἐν ᾧ τώρα τὰς δύο ἔστω πρώτας συναρτήσεις θεωροῦμεν ὡς μίαν, δυνάμεθα τὴν δοθεῖσαν παράστασιν νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι* $u_1(\chi)\, u_2(\chi)$ *καὶ* $u_3(\chi)$*. Καὶ αἱ δύο αὗται συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς διὰ* $\chi = \chi_0$*, ἤτοι* $u_3(\chi)$ *κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ* $u_1(\chi)\, u_2(\chi)$ *κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν θεώρημα.*

[Σημ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔστω (α) λέγει : ἐὰν αἱ 2 συναρτήσεις u (χ)

1. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 240, σελ. 79, Λειψία 1935, ὑπὸ Clemens Thaer, παρατήρησις εἰς τὰ θεωρήματα 8 καὶ 9 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

2. Ernst Lindelöf, Einführung in die Höhere Analysis, γερμανικὴ ἔκδοσις ὑπὸ E. Ullrich μετὰ τὴν πρώτην σουηδικὴν καὶ τὴν δευτέραν φινλανδικήν, σελ. 41, B. C. Teubner, 1950, Λειψία.

καὶ $v(\chi)$ *εἶναι συνεχεῖς διὰ* $\chi = \chi_0$ *εἶναι καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν* $u(\chi)$ $v(\chi)$ *συνεχές]. Κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα εἶναι συνεπῶς καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων [τῶν* $u_1(\chi)$ $u_2(\chi)$ *καὶ* $u_3(\chi)$*] συνεχὲς διὰ* $\chi = \chi_0$ *καὶ κατὰ ταῦτα ἀπεδείχθη τὸ θεώρημά μας ἐπίσης καὶ διὰ γινόμενον τριῶν συναρτήσεων.*

'Εὰν τώρα ἔχωμεν γινόμενον τεσσάρων συναρτήσεων

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi)\ u_4(\chi),$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι συνεχὴς διὰ $\chi = \chi_0$, *δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοῦτο ὡς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι τοῦ ἑνὸς* $u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi)$ *καὶ τοῦ ἄλλου* $u_4(\chi)$*. Ὁ πρῶτος παράγων εἶναι συνεχὴς κατὰ τὸ προηγουμένως ἀποδειχθὲν (περὶ τριῶν συναρτήσεων), ὁ δεύτερος εἶναι συνεχὴς καθ' ὑπόθεσιν. Καὶ κατὰ τὸ θεώρημα (α) εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων* $u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ u_3(\chi)$ *καὶ* $u_4(\chi)$ *συνεχές. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ πέντε συναρτήσεις κλπ. 'Αλλὰ τοῦτο δὲν χρειάζεται, διότι δυνάμεθα ὅλας αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις νὰ τὰς συμπεριλάβωμεν εἰς μίαν ἀπόδειξιν, καθ' ἣν ἀποδεικνύομεν :*

'Εὰν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον n *συναρτήσεων, ἰσχύει τοῦτο ἐπίσης διὰ γινόμενον* $n+1$ *συναρτήσεων, ἔνθα* n *δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς 2, 3, 4 ....*

Ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀπεδείχθη ἤδη, ὅτι ἓν γινόμενον n *συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι συνεχές, θεωροῦμεν τὸ γινόμενον* $n+1$ *συναρτήσεων*

$$u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ldots u_n(\chi)\ u_{n+1}(\chi), \qquad (1)$$

ἔνθα ἕκαστος παράγων διὰ $\chi = \chi_0$ *εἶναι συνεχής.*

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι ἔχομεν γινόμενον μόνον δύο παραγόντων, τῶν $u_1(\chi)\ u_2(\chi)\ldots u_n(\chi)$ *καὶ* $u_{n+1}(\chi)$*. Ἕκαστος παράγων ἐκ τούτων εἶναι συνεχὴς διὰ* $\chi = \chi_0$, *διότι ὑπεθέσαμεν ὅτι τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ* n *παράγοντας. 'Επειδὴ δὲ κατὰ τὸ θεώρημα (α) ἔχομεν ἀποδείξει τὴν συνέχειαν διὰ γινόμενον δύο παραγόντων, ἕπεται ὅτι ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι τὸ γινόμενον (1) εἶναι διὰ* $\chi = \chi_0$ *συνεχές. Ὅθεν τὸ θεώρημά μας εἶναι ἀληθὲς ἐπίσης διὰ γινόμενον* $n+1$ *παραγόντων, ἐὰν εἶναι ἀληθὲς διὰ γινόμενον* n *παραγόντων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι ».*

Εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτην ὁ Lindelœf ἀκολουθεῖ πιστότατα τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 20οῦ θεωρήματος τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Ὀλίγους μῆνας μετὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ἡμῶν ἐν τῇ 'Ακαδημίᾳ 'Αθηνῶν ἐλάβομεν παρὰ τοῦ Ὁλλανδοῦ καθηγητοῦ Hans Freudenthal (Μαθηματικὸν 'Ινστιτοῦτον τοῦ Πανεπιστημίου Rijks) πραγματείαν του γερμανιστί, ὑπὸ τὸν τίτλον «'Επὶ τῆς ἱστορίας τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς », δημοσιευθεῖσαν εἰς τὸ φύλλον 22 τοῦ 1953 τῆς τριμηνιαίας 'Επιθεωρήσεως τοῦ Διεθνοῦς 'Αρχείου τῆς Ἱστορίας τῶν 'Επιστημῶν, (ARCHIVES INTERNATIONALES D' HISTOIRE DES SCIENCES, Revue trimestrielle de l' Union Interna-

tionale d' Histoire des Sciences, Publiée avec le concours financier de l' UNESCO) Numéro 22-1953. Pages 17 à 37).

Μεταφέρομεν ἐνταῦθα τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα σημεῖα τῆς πραγματείας ταύτης.

« Λίαν ἐνωρὶς ὁ Ἰάκωβος Μπερνοῦλι (Jakob Bernoulli, 1645 — 1705) ἐθεωρεῖτο ὁ ἐπινοητὴς τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Ἔπειτα ἀπέδωκαν τὴν ἀνακάλυψιν τῆς μεθόδου εἰς τὸν Pascal (1623 — 1662). Εἰς τὰς περισσοτέρας ὅμως νέας πραγματείας θεωρεῖται ὅτι ὁ πρῶτος ἐπινοήσας τὴν μέθοδον ταύτην εἶναι ὁ Φραγκῖσκος Μαυρόλυκος [1]. Εἰς τὴν μόρφωσιν τῆς γνώμης ταύτης συνετέλεσεν ὁ G. Vacca, ὅστις ἀνέφερε πέντε θεωρήματα ἐκ τοῦ 2ου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Μαυρολύκου καὶ προεκάλεσε οὕτω τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν πρόκειται περὶ ἐφαρμογῆς τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Ὁ Vacca μνημονεύει, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τῶν Ἀριθμητικῶν του τονίζει, ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἠσχολήθη μόνον μὲ τοὺς ἐπιπέδους, τοὺς στερεούς, τοὺς τετραγώνους καὶ τοὺς κύβους ἀριθμούς, ἐν ᾧ διὰ τοὺς τριγώνους, πενταγώνους, ἑξαγώνους, ἑπταγώνους πολὺ ὀλίγαι ἔρευναι ἔγιναν καὶ ὅτι αὐτός, ὁ Μαυρόλυκος, ἐπιθυμεῖ νὰ ἐπανορθώσῃ τὴν παράλειψιν ταύτην τοῦ Εὐκλείδου.

Οὔτε ἐκ τῆς Εἰσαγωγῆς οὔτε ἐκ τοῦ λοιποῦ περιεχομένου τοῦ Βιβλίου δύναται νὰ ὑποστηριχθῇ, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἰσήγαγε καὶ ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ...».

« Εἰς τὸ θεώρημα 84 πρόκειται περὶ τῶν πολυγωνικῶν — πυραμιδικῶν ἀριθμῶν [2]. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τούτου, εὑρίσκομεν ἐνταῦθα γνησίαν πλήρη ἐπαγωγήν... Ἐν τῷ συνόλῳ εὗρον εἰς τὸν Μαυρόλυκον δύο παραδείγματα γνησίας καὶ ἓν τοιοῦτο ἀμφιβόλου, πλήρους ἐπαγωγῆς ».

Ἀκολουθεῖ ἡ ἔρευνα ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 22, 32, 35, 36 τοῦ IX Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Καὶ ὁ Freudenthal ἐπὶ τούτου ἐπάγεται : « Συμπερασματικῶς δύναταί τις νὰ εἴπῃ, ὅτι ἐπίσης καὶ εἰς τὸν Εὐκλείδην (δηλ. παραλλήλως πρὸς τὸν Μαυρόλυκον, ὅστις ἐγνώριζεν ἄριστα τὸν Εὐκλείδην) παρατηροῦνται μερικὰ παρα-

---

1. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἐγεννήθη ἐν Μεσσήνῃ τῆς Σικελίας τῷ 1494, ἐκ γονέων Ἑλλήνων, οἵτινες κατέφυγον εἰς Ἰταλίαν ἐκ Κωνσταντινουπόλεως μετὰ τὴν ἅλωσιν αὐτῆς ὑπὸ τῶν Τούρκων. Ἀπέθανε τῷ 1575. Ὁ πατήρ του ἦτο ἐκ τῶν λογίων ἀνδρῶν τῆς Κωνσταντινουπόλεως. Ὁ Φ. Μαυρόλυκος ἠσπάσθη τὸν Καθολικισμόν, γενόμενος μοναχός. [ἰδὲ Μεγάλη Ἰταλικὴ Ἐγκυκλοπαιδεία]. Μετέφρασεν ἐκ τῆς Ἑλληνικῆς εἰς τὴν λατινικὴν τὰ Φαινόμενα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ σφαιρικὰ τοῦ Θεοδοσίου καὶ τοῦ Μενελάου καὶ ἐξέδωκε παράφρασιν τοῦ περὶ Κέντρου βάρους τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Περὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων διαλαμβάνει ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ Εἰσαγωγῇ, ἐκδ. R. Hoche, Teubner, σελ. 99 κ. ἑ.

δείγματα πλήρους ἐπαγωγῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀλιγώτερον στοιχειώδη ἢ τὰ τοῦ Μαυρολύκου, ἀλλὰ περὶ συστηματικῆς ἐφαρμογῆς ἢ διατυπώσεως τῆς Ἀρχῆς δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος. Ὁ ἰσχυρισμὸς ὅμως τοῦ Tropfke καὶ τοῦ Günther, ὅτι ὁ Μαυρόλυκος εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις ἐφήρμοσε τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς εἶναι ὁπωσδήποτε ἀπορριπτέος ».

« Τὸ ἀκριβέστατον ὅμως ὑπόδειγμα (μέχρι τοῦ 19ου αἰῶνος) πλήρους ἐπαγωγῆς δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν Εὐκλείδην καὶ τὸν Ἀρχιμήδη, ἀλλὰ εἰς ἀπόσπασμα Πυθαγορείου θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ἐσώθη διὰ τοῦ Θέωνος (τοῦ Σμυρναίου), τοῦ Ἰαμβλίχου καὶ τοῦ Πρόκλου. Πρόκειται διὰ τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται διὰ τῆς ἐπαγωγῆς

$$a_1 = d_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \qquad d_{n+1} = d_n + 2a_n$$

(Σημ. Ἴδε εἰσαγωγὴν εἰς II τόμον Εὐκλείδου, σελ. 8).

« Ἐὰν θέλῃ τις δύναται νὰ θεωρήσῃ ἀκόμη ἓν παράδειγμα πλήρους ἐπαγωγῆς τὸ ὑπὸ τοῦ B. L. van der Waerden σημειούμενον ἐκ τῶν σχολίων τοῦ Σιμπλικίου εἰς τὰ Φυσικὰ τοῦ Ἀριστοτέλους [1]. Πρόκειται περὶ τοῦ γνωστοῦ χωρίου περὶ τοῦ Ζήνωνος :

Προδείξας γὰρ ὅτι ' εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη ', ἐπάγει ' εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου· καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος· καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· ' [Ἑρμηνεία : διότι προαποδείξας ὅτι « ἐὰν τὸ ὂν δὲν ἔχῃ μέγεθος, δὲν θὰ ὑπάρχῃ, ἐπάγεται « ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ, εἶναι ἀνάγκη ἕκαστον μέρος αὐτοῦ νὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πάχος καὶ ἀπόστασιν τὸ ἓν μέρος ἀπὸ τοῦ ἄλλου. Καὶ περὶ τοῦ προηγουμένως κειμένου μέρους ἰσχύει τὸ αὐτό· διότι καὶ ἐκεῖνο θὰ ἔχῃ μέγεθος καὶ πρὸ αὐτοῦ θὰ κεῖται ἄλλο· διότι τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τὸ εἴπῃ τις μίαν μόνον φορὰν καὶ νὰ ἰσχύῃ γενικῶς »].

2. *Μία παρατήρησις ἐπὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{2}$ παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (19 - 1 - 1953).

Ἴδε Εἰσαγωγὴν II τόμου τῶν Στοιχείων, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953, σελὶς 17.

---

1. Math. Ann. 117 (1939), 148. — SIMPL. Phys. 140, 34.

3. *Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος περὶ μεγίστου.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (10 - 12 - 1953).

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος 27 τοῦ VI Βιβλίου τῶν Στοιχείων περὶ μεγίστου (τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα περὶ μεγίστου εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν) εἶναι γενική.

4. *Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (4 - 6 - 1954).

Διὰ παραθέσεως χωρίων ἀρχαίων Ἑλλήνων συγγραφέων ὑποστηρίζεται, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ οὐχὶ ἁπλῶς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη.

Ἐκ τῶν χωρίων τούτων μνημονεύομεν δύο τοῦ Ἀριστοτέλους

α΄. « Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ » (Ἠθικὰ Νικομάχεια Ε΄ ΙΙΙ 8).

β΄. « Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν· ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται » (Μετὰ τὰ Φυσικὰ 1021 α 4). [Σημ. Ὁ Ross διορθώνει « κατὰ μὴ συμμέτρου δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται », ὅπερ παρουσιάζεται μὴ ἀποδίδον ἔννοιάν τινα. Ὁ Apelt δέχεται τὸ ὀρθόν].

5. *Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$.*

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2 - 6 - 1955).

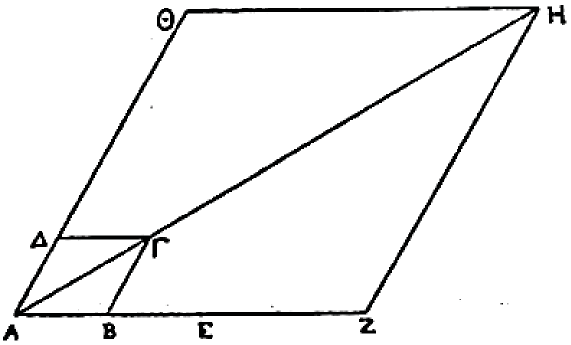
Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως (ὡς γνωστὰς) τὰς σχέσεις

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \qquad \text{καὶ}$$

$$265^2 = 3.153^2 - 2\,, \qquad 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ Θ. ΙΙ. 10 τῶν Στοιχείων, διὰ τοῦ ὁποίου κατὰ τὸν Πρόκλον καὶ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον ὑπολογίζεται ἡ $\sqrt{2}$ διὰ κατασκευῆς τετραγώνων (ἴδε Εἰσαγωγὴν ΙΙ τόμου, σ. 8) εὑρίσκονται οἱ ἀνωτέρω τύποι τοῦ Ἀρχιμήδους διὰ κατασκευῆς συνεχῶν ῥόμβων.

. *Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ῥόμβον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία* $AB\Gamma = 120^0$. *Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ. Καλοῦμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ῥόμβου* $AB = \alpha_1$ *καὶ τὴν διαγώνιον* $A\Gamma = \delta_1$. *Κατὰ τὸ ΙΙ 12 τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν* $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$ (1) *καὶ συνεπῶς* $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. *'Επὶ τῆς προεκτά-*



σεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $BE = AB = \alpha_1$ *καὶ ἐν συνεχείᾳ τμῆμα* $EZ = A\Gamma = \delta_1$. *Κατὰ τὸ ΙΙ 10 τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν*

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2,$$ *καὶ ἐκ ταύτης*

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2 \qquad (2).$$

Εἶναι ἄρα καὶ
$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1^2 \qquad (3).$$

'Αλλὰ κατὰ τὴν (1) εἶναι $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$. *'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸ β'. μέλος τῆς (3) λαμβάνομεν*

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2$$

ἢ
$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = (3\alpha_1 + 2\delta_1)^2 \qquad (4).$$

'Η σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ, ὅτι ἡ μὲν $2\alpha_1 + \delta_1$, *ἣν καλοῦμεν* α_2, *εἶναι ἡ πλευρά, ἡ δὲ* $3\alpha_1 + 2\delta_1$ *ἣν καλοῦμεν* δ_2, *εἶναι ἡ διαγώνιος δευτέρου ῥόμβου τοῦ ΑΒΖΗΘ, ὁμοίου πρὸς τὸν πρῶτον, τὸν ΑΒΓΔ. "Οθεν εὑρέθη ὁ νόμος κατασκευῆς ὁμοίων ῥόμβων. 'Η πλευρὰ ἑκάστου τούτων εἶναι* $\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$ *καὶ ἡ διαγώνιος* $\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

Οἱ συναφεῖς πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, ἤτοι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι τῶν συνεχῶν ῥόμβων, θὰ εἶναι

	Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ (πλευρά)	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ (διαγώνιος)*
πρώτου ῥόμβου	α_1	δ_1
δευτέρου ῥόμβου	$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
τρίτου ῥόμβου	$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
τετάρτου ῥόμβου	$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
	$\vdots$	$\vdots$
ν ῥόμβου	$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

'Εὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$, *λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 1$
$\alpha_2 = 3$	$\delta_2 = 5$
$\alpha_3 = 11$	$\delta_3 = 19$
$\alpha_4 = 41$	$\delta_4 = 71$
$\alpha_5 = 153$	$\delta_5 = 265$
$\vdots$	$\vdots$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσομεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3}$$

καὶ

$$\begin{aligned} 1^2 &= 3 \cdot 1^2 - 2 \\ 5^2 &= 3 \cdot 3^2 - 2 \\ 19^2 &= 3 \cdot 11^2 - 2 \\ 71^2 &= 3 \cdot 41^2 - 2 \\ 265^2 &= 3 \cdot 153^2 - 2 \\ &\vdots \\ y^2 &= 3 \cdot \chi^2 - 2 \end{aligned}$$

'Εὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$, *λαμβάνομεν τὰς ἑξῆς πλευρὰς καὶ διαγωνίους διαδοχικῶν ὁμοίων ῥόμβων*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
$\alpha_1 = 1$	$\delta_1 = 2$
$\alpha_2 = 4$	$\delta_2 = 7$
$\alpha_3 = 15$	$\delta_3 = 26$
$\alpha_4 = 56$	$\delta_4 = 97$
$\alpha_5 = 209$	$\delta_5 = 362$
$\alpha_6 = 780$	$\delta_6 = 1351$

Καὶ εἶναι, ἀφοῦ σχηματίσομεν τοὺς ἀντιστοίχους λόγους τῶν διαμετρικῶν πρὸς τοὺς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

καὶ

$$\begin{aligned} 2^2 &= 3 \cdot 1^2 + 1 \\ 7^2 &= 3 \cdot 4^2 + 1 \\ 26^2 &= 3 \cdot 15^2 + 1 \end{aligned}$$

$$97^2 = 3 \cdot 56^2 + 1$$
$$362^2 = 3 \cdot 209^2 + 1$$
$$1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1$$
$$\vdots$$
$$y^2 = 3 \cdot \chi^2 + 1$$

Εὑρέθησαν δηλ. οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἄνευ ἀποδείξεων (ὡς εὑρεθέντας ὑπὸ προγενεστέρων του), ἤτοι

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

καὶ $265^2 = 3 \cdot 153^2 - 2, \qquad 1351^2 = 3 \cdot 780^2 + 1.$

[Σημ. Ἡ λῆψις 1) $a_1 = 1,\ \delta_1 = 1$ *καὶ 2)* $a_1 = 1,\ \delta_1 = 2$ *εἶναι χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων, τῆς σήμερον λεγομένης iteratio. Αὕτη ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς Πυθαγορείους, ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς* $\sqrt{2}$ *διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Συναφὴς εἶναι ἡ ἀνακοίνωσις ἡμῶν ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 14.6.1956].*

θ. Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (2-6-1955).

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης πραγματείας διὰ τὴν $\sqrt{3}$ *εὑρίσκεται ἡ* $\sqrt{\lambda}$ *διὰ* $\lambda \geqq 5$, *(ἀκέραιον) ἐκ τῶν ἀντιστοίχων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι :*

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	*Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ*
a_1	δ_1
$a_2 = 2a_1 + \delta_1$	$\delta_2 = \lambda a_1 + 2\delta_1$
$a_3 = 2a_2 + \delta_2$	$\delta_3 = \lambda a_2 + 2\delta_2$
$a_4 = 2a_3 + \delta_3$	$\delta_4 = \lambda a_3 + 2\delta_3$
$\vdots$	$\vdots$
$a_\nu = 2a_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = \lambda a_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$

καὶ $$\frac{\delta_1}{a_1} < \frac{\delta_3}{a_3} < \frac{\delta_5}{a_5} < \cdots \sqrt{\lambda} \cdots < \frac{\delta_6}{a_6} < \frac{\delta_4}{a_4} < \frac{\delta_2}{a_2}$$

(λαμβάνεται $a_1 = 1$ *καὶ* $\delta_1 = 2$*).*

Εἶναι δὲ ἀκόμη $\delta_\nu^2 = \lambda a_\nu^2 + (\lambda - 4)^\nu (-1)^\nu$.

7. Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Διὰ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (24 - 11 - 1955).

Εἰς τὸ περίφημον τοῦτο θεώρημα ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους αὐτοῦ γίνεται, κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν ταύτην, ὡς καὶ τοῦ πρώτου, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γ' θεωρήματος τῆς Κύκλου μετρήσεως τοῦ Ἀρχιμήδους.

8. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου (12 - 1 - 1956).

Εἰς τὸ χωρίον τοῦτο ὁ Πλάτων γράφει ὅτι ὁ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἀπέδειξε τὸ ἀσύμμετρον τῆς $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ καὶ ὅτι μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς $\sqrt{17}$ ἐσταμάτησεν. Ὑποστηρίζεται διὰ τῆς πραγματείας ταύτης ἐπὶ τῇ βάσει χωρίων παλαιῶν συγγραφέων, ὅτι ὁ Πλάτων ὑπαινίσσεται ἐνταῦθα τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ 17 καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἀφίνει τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν $\sqrt{17}$. Μνημονεύονται 1) Ὁ μουσικὸς τόνος διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος ὁ $\frac{9}{8}$, 2) Ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τούτων 9 καὶ 8 ἰσοῦται πρὸς 17, 3) Ὅτι οἱ ὅροι οὗτοι 9 καὶ 8 εἶναι οἱ μέσοι ὅροι τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$, 4) Ὅτι τὸ πλῆθος τῶν συλλαβῶν τοῦ πρώτου στίχου τῆς Ὀδυσσείας «ἄνδρα μοι ἔννεπε...» εἶναι 17, 5) Ὅτι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ Παρθενῶνος ἔχει 17 κίονας καὶ ἡ μικροτέρα 8, ἤτοι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κιόνων τοῦ Παρθενῶνος ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς μουσικῆς ἀναλογίας $6 : 8 = 9 : 12$, ἐξ ἧς κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ τοῦ Πυθαγόρου.

9. Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (14 - 6 - 1956).

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις, καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος χ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi = \varphi (\chi)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω χ_0, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\chi_{n+1} = \varphi (\chi_n)$, $[n = 0, 1, 2....]$

κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν χ_1, χ_2, χ_3.... Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν ξ, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi = \varphi(\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἀποδεικνύεται διὰ συναφῶν παραδειγμάτων, ὅτι ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου.

10. Ἐπὶ τοῦ Χ Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (17 - 1 - 1957).

Παρέχεται νέα ἑρμηνεία τοῦ περιεχομένου τοῦ Χ Βιβλίου τῶν Στοιχείων καὶ ὑποστηρίζεται, ὅτι σκοπὸς τοῦ Βιβλίου τούτου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται διὰ τὴν κατασκευὴν τούτου τὰ ἁπλούστατα τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν.

11. Ἐπὶ τοῦ μαθηματικοῦ χωρίου τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος, μέρος ΙΙ.

Διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου (31 - 1 - 1957).

Διὰ τῆς παραθέσεως στίχων ἐκ τῆς Ὀδυσσείας τοῦ Ὁμήρου φαίνεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 17 ἦτο ἱερὸς καὶ ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ Ὁμήρου. Συνεπῶς ἐνισχύεται ἔτι περαιτέρω ἡ κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς 12.1.1956 ὑποστηριχθεῖσα ἄποψις, ὅτι ὁ Πλάτων ἀφίνων τὸν Θεόδωρον νὰ σταματήσῃ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀσυμμέτρου τῆς $\sqrt{17}$ ὑπαινίσσεται τὴν ἱερότητα τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.